O Conceito do Infinito

Marcelo Sampaio de Alencar
Instituto de Estudos Avançados em Comunicações (Iecom)
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

1 Introdução

O infinito fascina a humanidade há milhares de anos. Tanto o infinitamente grande quanto o infinitamente pequeno tem consumido anos de trabalho dos filósofos, matemáticos, físicos e engenheiros, e levado alguns deles literalmente à loucura. Para estimar o infinito, claro, é preciso medí-lo.

2 Conjuntos Infinitos

A noção de contagem, ou medida, de conjuntos é essencial para a Matemática e relativamente simples quando os conjuntos são finitos. A dimensão, tamanho, ou cardinalidade de um conjunto, nesse caso, é apenas o número de elementos distintos que o compõem (1).

Entretanto, a comparação entre conjuntos infinitos, como o conjunto dos números naturais, ou o conjunto dos números reais, é uma tarefa complexa. A primeira idéia que vem à mente é a de que os conjuntos infinitos deveriam ter a mesma cardinalidade, ou total de elementos. Pensar na existência de conjuntos infinitos maiores que outros parece insano. Imaginar que um subconjunto pode ter o mesmo número de elementos do conjunto do qual ele faz parte foge ao senso comum. Mas é perfeitamente plausível.

Um experimento intelectual pode lançar uma luz sobre essa comparação entre conjuntos. Considere o conjunto dos números naturais, aqueles que são usados para contar. Esse conjunto é formado pela série 1, 2, 3, 4, ..., até o infinito. Os pares, 2, 4, 6, 8, ..., certamente formam um subconjunto dos naturais.

Imagine um trem com um número infinito de assentos. Se todos os assentos estiverem ocupados, em ordem, um conjunto de passageiros, equivalente à coleção de números naturais, estaria pronto para a viagem. Suponha, entretanto, que um novo conjunto infinito de passageiros acaba de chegar. Seria ainda possível acomodá-los no trem?

A resposta correta é sim, por mais estranho que possa parecer. O argumento é pura lógica de conjuntos. Basta que o condutor peça a todos os passageiros para passarem para as cadeiras cuja numeração seja o dobro do número de sua própria poltrona. Por exemplo, o passageiro no assento número 3 passaria para o de número 6, aquele com o número 6 passaria para a cadeira 12, e assim por diante.

Isso deixaria todas as cadeiras ímpares vazias. Como o conjunto de números ímpares é infinito, essas poltronas poderiam acomodar todos os novos passageiros sentados!

3 Relações entre Conjuntos

O experimento do ônibus inifinito significa que há uma equivalência perfeita entre os conjuntos de números naturais e seus subconjuntos, os pares e ímpares. Isso se chama relação biunívoca, e implica associar a cada elemento de um determinado conjunto um, e somente um, elemento de outro conjunto (2).

Um exemplo de relação biunívoca se estabelece entre os países e suas capitais. Cada capital identifica inequivocamente um país, e vice-versa. Como os números pares estão associados aos naturais pela relação de duplicação, ambos conjuntos têm mesma cardinalidade, ou mesmo número de elementos, em linguagem mais informal.

Mas, o que dizer do conjunto dos números inteiros positivos e negativos; do conjunto dos racionais, aqueles números fracionários; do conjunto dos irracionais, que inclui a raiz do número dois, por exemplo; do conjunto dos reais, que contém os racionais e irracionais; do conjunto de números complexos, que contém os reais e os imaginários. Eles também podem ser comparados? Algum deles tem cardinalidade maior que a de outro?

Essas questões, e muitas outras, ficaram sem resposta até o aparecimento da indução transfinita, criada pelo russo Georg Cantor, no final do século 19. E ele deu respostas tão assombrosas, que foi incompreendido até pelos maiores matemáticos de seu tempo.

George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nasceu a 3 de Março de 1845, em São Petersburgo, Rússia. Estudou na Universidade de Zurich e em Berlim. Conseguiu depois um emprego como professor assistente na Universidade de Halle, onde ensinou por toda a vida, desde 1872. A partir de 1879 tornou-se professor titular.

Halle é uma pequena cidade da Alemanha, cuja universidade é mais conhecida hoje em dia pelos estudos na área de mineração, e tem uma cooperação na área com a Universidade Federal de Campina Grande. Ela é também famosa pela produção de sal de pedra e por ser a cidade natal do compositor Georg Friederich Händel (1685-1759).

4 Vários Infinitos

Cantor é um dos fundadores da Teoria Avançada dos Conjuntos e um dos maiores matemáticos e lógicos de todos os tempos. Deve-se a Cantor uma análise profunda do conceito de infinito. Em 1877, Cantor provou, para assombro de vários colegas, que existiam vários tipos de conjuntos infinitos, introduzindo a medida de potência, ou cardinalidade, de conjuntos, que equivale ao número de elementos quando os conjuntos são finitos (3).

A comparação entre as cardinalidades de conjuntos levou Cantor ao conceito de correspondência ou relação. Dois conjuntos são equipotentes, ou têm mesma cardinalidade, quando é possível estabelecer entre os seus elementos uma correspondência biunívoca. Os resultados que obteve foram surpreendentes para ele mesmo, que mencionou isso em uma carta a Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), um matemático excepcional, em 1877.

A partir da teoria desenvolvida por Cantor, pode-se provar que o conjunto dos pontos de um retângulo tem a mesma cardinalidade do conjunto dos pontos de qualquer dos seus lados. De forma geral, os conjuntos infinitos têm potência igual à de qualquer das suas partes. Essa propriedade pode também ser usada como definição do conjunto infinito.

Cantor reintroduziu na Matemática a noção de infinito, discutida desde a época dos filósofos gregos clássicos, como Pitágoras de Samos, Demócrito, Zenão, Aristóteles e Arquimedes. O infinito sempre foi olhado com suspeição por conta dos paradoxos a que conduzia. Matemáticos, como Leopold Kronecker (1823-1891), que foi professor de Cantor na Universidade de Berlin, o evitavam.

Para Kronecker uma entidade matemática que não pudesse ser construída em um número finito de passos não fazia sentido. Aliás, Kronecker suspeitava também dos números negativos, dos irracionais, dos complexos e defendia o banimento dessas entidades exóticas que, para ele, eram uma maldição e a fonte de todos os problemas da Matemática. Cantor deu ao infinito uma base lógica rigorosa, com o conceito de correspondência, ou mapeamento entre conjuntos.

Para um conjunto ordenado, a sua potência (número cardinal) é considerada como um número ordinal. No caso dos conjuntos finitos, número cardinal e ordinal coincidem. Entretanto, isso não se verifica com conjuntos infinitos, que geram os números ordinais transfinitos de Cantor. Ele conseguiu mostrar que o conjunto dos números reais tem cardinalidade maior que o conjunto dos números naturais. Ou seja, comparando os dois infinitos, o infinito real é maior que o infinito natural. Há muito mais elementos na reta real que podem ser contados usando os números inteiros, mesmo sendo esse conjunto infinito.

5 O Infinito Aplicado

A teoria desenvolvida por Cantor é fundamental para a Matemática moderna e, em conjunto com a Teoria da Medida, desenvolvida por Henri Léon Lebesgue (1875-1941), formam a base da Teoria da Probabilidade, desenvolvida na década de 1930 por Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) (4).

Entretanto, apenas poucos, como Dedekind, perceberam a importância da Matemática Transfinita de Cantor. Kronecker, com sua aversão por tudo que não fosse inteiro, fez um esforço para evitar que a teoria de Cantor fosse publicada e, provavelmente, também interferiu para impedir sua contratação pela Universidade de Berlin.

Cantor, que a vida inteira tentou sair de Halle, nunca logrou fazê-lo. Teve que enfrentar a realidade, que estava muito velho e doente para mudar de instituição e levou a vida complexado, achando-se perseguido por um conjunto de fatores que não estava ao seu alcance. Durante a última parte de sua vida sofreu vários ataques de depressão, que comprometeram sua capacidade de trabalho e o levaram ao hospital inúmeras vezes. Cantor estava perdendo a razão.

Provavelmente sofria de transtorno bipolar, agravado com a perseguição de Kronecker. Os surtos nervosos tornaram-se mais frequentes e prolongados com o tempo e ele foi ficando cada vez mais irracional. Com 72 anos de idade, Georg Cantor, o homem que deu uma contribuição incontável à Teoria dos Conjuntos, morreu de causas naturais em um hospital psiquiátrico, em 6 de janeiro de 1918, há exatos 90 anos. Ninguém poderia imaginar que ele chegaria à finitude da vida dessa forma.

6 Epílogo

Hermann Minkowski (1864-1909), que desenvolveu a teoria geométrica dos números e foi professor de Albert Einstein (1879-1955), disse de Cantor:

> "As gerações futuras vão considerar Cantor como um dos mais profundos pensadores matemáticos desta época."

David Hilbert (1862-1943), um dos mais influentes matemáticos do século passado, definiu o trabalho de Cantor como:

> "O produto mais elaborado do gênio matemático e um dos achados supremos da pura atividade intelectual humana."

Referências

Marcelo S. Alencar. O Homem que Vi e Contou o Infinito I. Artigo para jornal eletrônico na Internet, Jornal do Commercio *On Line*, Recife, Brasil, Março 2008.

Marcelo S. Alencar. O Homem que Vi e Contou o Infinito II. Artigo para jornal eletrônico na Internet, Jornal do Commercio *On Line*, Recife, Brasil, Março 2008.

Marcelo S. Alencar. O Homem que Vi e Contou o Infinito III. Artigo para jornal eletrônico na Internet, Jornal do Commercio *On Line*, Recife, Brasil, Abril 2008.

Marcelo S. Alencar. O Homem que Vi e Contou o Infinito IV. Artigo para jornal eletrônico na Internet, Jornal do Commercio *On Line*, Recife, Brasil, Abril 2008.